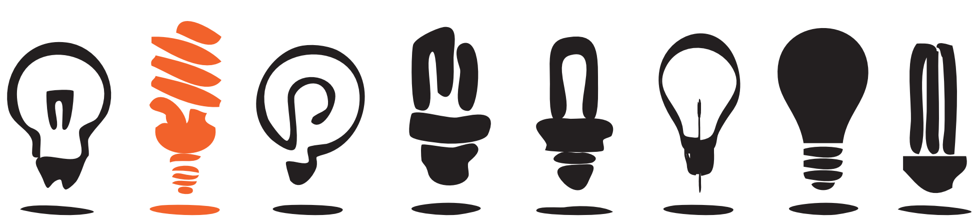
Votre expert en habilitation électrique

Les fiches techniques

74

Divers

Les séries de Fourier



Nicolas DOUGUET - Formateur Consultant
www.ndingenierie.fr
62 Rue George Sand 37000 Tours
02.46.65.08.91
nd.ingenierie@gmail.com

SARL NDIngénierie
N° de SIRET : 808 572 499 00016
Enregistré sous le n° 24 3703091 37 auprès du Préfet de la Région Centre

74 Séries de Fourier

74 ▪ 1 Principe de décomposition

La méthode proposée permet de décomposer des signaux rencontrés pour peu qu'ils soient périodiques et non sinusoïdaux en une somme de fonctions sinusoïdales possédant des pulsations multiples du signal d'origine.

74 ▪ 2 Détermination des coefficients

Les différents coefficients a_0, a_1, b_1, b_0, a_n et b_n composant la série seront déterminés par les formules d'Euler-Fourier.

Le terme a_0 est égal à la valeur moyenne du signal d'origine.

Les coefficients trouvés a_n et b_n sont les harmoniques de rang n issus de la décomposition.

Le premier harmonique est appelé le fondamental du signal d'origine et possède la même pulsation que celui-ci.

L'amplitude d'un harmonique H de rang n est donné par la relation :

$$\text{Amplitude de } H_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

La phase par rapport au signal d'origine d'un harmonique H de rang n est donné par la relation :

$$\text{Phase de } H_n = \arctan H \frac{b_n}{a_n}$$

74 ▪ 3 Simplification des calculs

74 ▪ 31 Le signal est une fonction impaire

Si le signal présente une symétrie par rapport au point O correspondant à l'origine des axes, alors la fonction est impaire $f(-t) = -f(t)$. Cette particularité entraîne que tous les coefficients b_n sont nuls, il ne reste qu'à calculer les coefficients a_n. La valeur moyenne de a_0 est nulle. L'intégration ne sera faite que sur une demi-période.

74 ▪ 32 Le signal est une fonction paire

Si le signal présente une symétrie par rapport à l'axe vertical Oy, alors la fonction est paire $f(-t) = f(t)$.

Cette particularité entraîne que tous les coefficients a_n (sauf a_0) sont nuls, il ne reste donc à calculer que les coefficients a_0 et b_n. L'intégration ne sera faite que sur une demi-période.

Définition d'une série trigonométrique

Une fonction continue $f(t)$ de période T non sinusoïdale peut se décomposer sous forme d'une série $S_n(\omega t)$ qui possède la limite $f(t)$ lorsque n tend vers l'infini :

$$\mathrm{Sn}(\omega t) = a_0 + a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t + a_2 \sin 2\omega t + b_2 \cos 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t + b_3 \cos 3\omega t + a_4 \sin 4\omega t + b_4 \cos 4\omega t + \dots + a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t$$

avec : ω pulsation égale à $\frac{2\pi}{T}$ et T période du signal à décomposer.

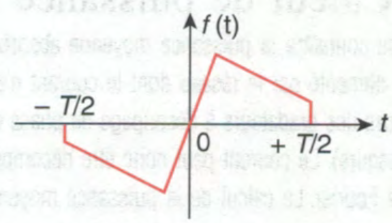
Coefficients $a_0, \dots a_{n1}, b_n$:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,.\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,.\sin(n\,\omega t)\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,.\cos(n\,\omega t)\mathrm{d}t$$

Exemple de signal correspondant à une fonction impaire



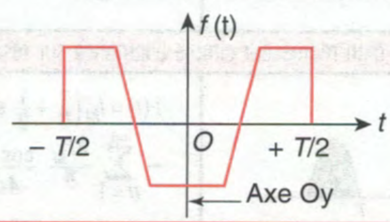
L'intégrale pour obtenir les coefficients a_n devient :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,.\,\sin(n\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t$$

La série de Fourier est donc :

$S_n(\omega t) = a_1 \sin 1\omega t + a_2 \sin 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t + a_4 \sin 4\omega t + \dots + a_n \sin n\omega t$

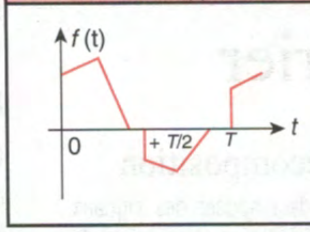
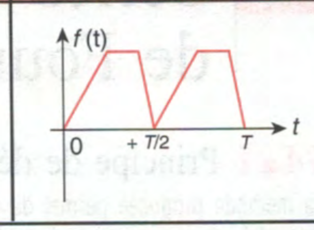
Exemple de signal correspondant à une fonction paire



Les intégrales pour obtenir a_0 et les coefficients b_n deviennent :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,.\,dt$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,.\,\cos(n\,\omega\,t)\,dt$$

Alternances opposées	Alternances répétées
	

74 ▪ 33 Autres cas possibles

Si le signal possède une alternance positive identique au signe près à l'alternance négative, f(t) = f($t + T/2$), la valeur moyenne a_0 est nulle et il n'existera que des harmoniques de rang pair.

Si le signal possède une alternance qui se répète f(t) = f($t + T/2$), il n'existera que des harmoniques de rang pair et une valeur moyenne.

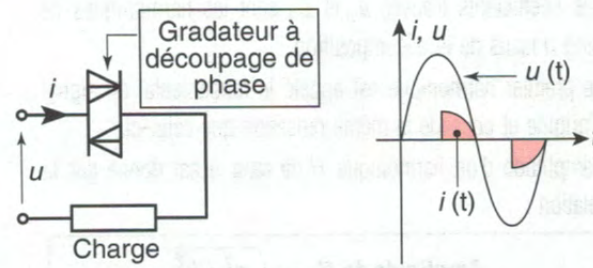
Valeur efficace au carré d'une série S_n

$$S^2_{neff} = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + b_n)^2}{2}$$

74 ▪ 4 Valeur efficace d'une série

Lors de calculs, il est possible de devoir connaître la valeur efficace du signal d'origine. La valeur efficace S_n de la série élevée au carré issue de la décomposition du signal origine est donnée par la relation ci-contre.

Exemple de gradateur à découpe de phase sur charge R



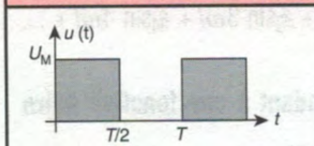
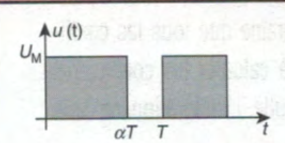
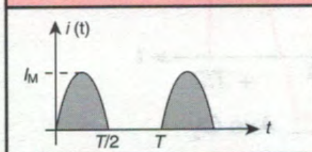
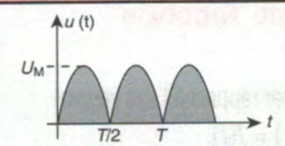
74 ▪ 5 Calcul de puissance

Il est utile de connaître la puissance moyenne absorbée par un montage alimenté par le réseau dont le courant n'est pas sinusoïdal (cas des gradateurs à découpage de phase ou des ponts redresseurs). Le courant peut donc être décomposé en une série de Fourier. Le calcul de la puissance moyenne fait apparaître que seul le premier harmonique contribue au transport de la puissance utile, les autres harmoniques fournissant une puissance déformante.

$$P_{moy} = U\,.\,I_{(n=1)}\,.\cos\varphi_{(n=1)}$$

avec $I_{(n=1)}$ valeur efficace du fondamental et $\varphi_{(n=1)}$ déphasage entre u et le fondamental du courant

74 ▪ 6 EXEMPLE DE DÉCOMPOSITION DE SIGNAUX

Signal carré unidirectionnel		Signal carré à rapport cyclique variable	
	$u(t) = \frac{U_M}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_M}{n\pi}\sin(n\omega t)$ avec n impair		$u(t) = \alpha U_M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_M}{n\pi}(-\cos 2n\alpha\pi + 1)\sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_M}{n\pi}\sin 2n\alpha\pi\cos n\omega t$
Courant d'un redresseur simple alternance sur résistance		**Sortie redresseur bi-alternance**	
	$i(t) = I_M\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\omega t\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2I_M}{\pi}\cdot\frac{\cos 2n\,\omega t}{4n^2-1}$		$u(t) = \frac{2U_M}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4U_M}{\pi}\,\frac{\cos 2n\omega t}{4n^2-1}$